

自己的數學，自己教（二）

【線上課程】+【實體課程】

課程說明

這是一門可以修復你跟數學關係的課
也是一條通往名師的道路

線上

在有意思的情境中探究：深入理解倍數和因數

時間：11/16 9:00~10:50

某數的倍數(multiples)，是乘幾倍的結果，把它們通通收集起來，有什麼值得一提呢？因數(factor)，顧名思義，又是藏在什麼事情背後的因素？在《數學想想》裡，貫穿這兩大概念的，是一個很有意思的「艦長問題」；投入問題的情境，一步步探究，將有驚奇的發現，也更理解因倍數的要義。

說起〈尋找因數〉，遇到遍尋不著的情況，是一個大挑戰！比如97，怎麼篤定它沒有因數（除了1和它自己）？免不了要「逐一試除」。然而，若從除以1、2、3、...傻傻地試到97，實在太麻煩了。如何能減少測試？往這方向思索，我們不只要發現「免試」的規則（以兩位數來說，最多只試到9），而且要論說其理（證明10之後免試）。

線上

見樹，還要見林：掌握除法的兩種含意

時間：11/16 13:00~14:50

除法的應用很多樣，即便只求快速解題，也不能去找關鍵字，以為算法是「大÷小」；許多小孩靠刷題、記題型，花了很多力氣，卻認識不清，以致於面對新問題時，彷彿在林子裡碰到沒見過的樹木，只覺陌生，非仰賴外力無法推知它屬於「除法品種」。

很會算，不代表有充分的理解。不妨測試一下：先試著編幾個「不同樣子」的除法文字題，都要符合「 $3 \div 0.5$ 」；再想一想，怎麼判斷它們與除法有關？既然，除法常用在平分的情境，理當要有些題目的本質是「總數 平分成 份」；那麼，「總數3 平分 成0.5份」，如何能說得明白？

〈平分除和包含除〉，讓我們從除法的原始意義，深入掌握概念的本質。一旦能看透整數的情況，下一步可以引申到除以小數或分數，化解所有的疑問與迷惘。



跨域統整。雙語共舞：真正明白併式運算和分數加法

時間：11/23 9:00~10:50

在學校四年級學「兩步驟問題與併式」，例如「某物原價1250元，折扣後便宜了125元，若付給1500元，會找回多少？」這要分步驟處理($1250-125=1125$ ； $1500-1125=375$)，小孩早就會了；現在的指令是將「先算的」加上括弧，代入「後算的」式子裡，讓二式合併為一式「 $1500-(1250-125)$ 」。整課就依此準則，不斷地要求小孩練習。

如此一來，合理的質問是：為什麼要寫成併式呢？能否不必先分步驟算，直接寫出併式啊？——這就需要〈括弧與引號〉的對比，因為，「併式」根本是一個語言問題。學習做語言的分析，將題目表述為一個完整而較複雜的句子（即英文文法中的 complex sentence），小孩會發現：這種長長的句子，就相當於數學上的併式。換言之，他是同時練到解析題目和併式。

在學校五年級學分數加法，根本上也有一個語言問題。例如 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ，從這圖上來看，不就等於 $\frac{2}{6}$ （6份中的2份）嗎？有人說，把兩個 $\frac{1}{3}$ 都畫在同一個圓裡，就可以看到正確答案是 $\frac{2}{3}$ ，但這無法回應這個合理的追問：偏偏要畫在兩個圓裡解讀，到底是哪裡不對？〈關於分數相加的想法〉，從語言上的共識，來釐清其中的錯誤；不止比較了數學式子與中文語句，而且引入英文的說法，讓小孩充分體會分數加法，在算則背後的道理。



與數學的距離。由「想想」決定：「除了又除」的啟示

時間：11/23 13:00~14:50

當數學保留了事情最精要的部份，例如 $a \div (b \times c) = a \div b \div c$ 這運算性質（連續除以兩個數 = 除此兩數的乘積），而教學時，只舉出幾個實例（代入數字，或針對文字題從不同思路解之，皆可呈現此等式成立），接著就要小孩歸納，記憶，用它解題——這會讓人莫名所以，覺得數學很疏遠。

《想想》設計的是一趟「發現之旅」。因為，所有的道理，本來都是為了解決實際的問題，那麼，〈除了又除〉可能來自怎樣的問題呢？我們邀請小孩聽一個童話故事，一邊聽，一邊和那個國家的人民一起，嘗試解決除法的難關。

在過程中得到的啟示可多了：

首先，不怕犯錯，錯是對的開始。其次，突破計算上的限制，善用圖像工具。接著，嘗試記錄所發現，思量該記得的要點。最後，提煉出普遍的規則，體會「代數」（用符號代替數字）的妙用！



是開展思路，不是套用公式：玩味「速度」問題

時間：11/30 11:05~12:00

面對基本的速度題目，很多人都習慣套用公式（「 $\text{速度} = \text{距離} \div \text{時間}$ 」「 $\text{時間} = \text{距離} \div \text{速度}$ 」「 $\text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}$ 」共三款）。這麼一來，對於較複雜的題目，就更難自己去推敲，而不得不倚賴公式：遇到相向問題就「 $\text{時間} = \text{距離} \div (\text{速度和})$ 」、遇到追趕問題就「 $\text{時間} = \text{距離} \div (\text{速度差})$ 」，遇到流水問題就...

當「速度」帶來的不是無感，就是痛苦，那乾脆別學了吧？可是，要倒掉的是盆子裡的髒水，總不能連嬰兒也一起倒了；「速度」概念本身很重要，學習也應該是鍛鍊頭腦的機會才對。因此，《想想》超越一般課本，帶小孩玩味一個困難的「動態平衡」問題：根據人流進、出博物館的速度，能不能推知〈裡面有幾個人〉？不難想到人數未知，但可以判斷增減；這時，思考並未停止，可試著假定裡面有幾人，再往下推想，就會發現...

在思路逐步開展的過程中，小孩反覆操作「停格法」，這是研究速度問題的法寶。所謂取法乎上（玩味過好問題）成乎中，要解決那些課本考卷的題目，就不是什麼難事了。



是巧合，還是必然：論三角形的內角和與面積

時間：11/30 13:00~14:50

課本是這樣教的：三角形的三個角，請小孩用量角器量過，把角度加起來，以及，把它們剪下來，拼湊看看——都可以得到相同的結果。但這樣是不是用「動手做」的方式，證明了「 $\text{三角形內角和} = 180^\circ$ 」？有些人會誤以為「是」，甚至說，這只是不像國中學到的證明那麼嚴謹。

因此，當課本上有這些操作，大人更應該帶小孩區分「現象」和「道理」。那樣測量或拼湊，都只是肯定了「 $\text{內角和} = 180^\circ$ 」的現象；而我們想要追問：任何（平面上的）三角形都會這樣嗎？怎麼知道一定會這樣？——這樣是去解釋它的道理。於是在〈一筆畫星星〉裡，提供了有感的論證，說明 180° 並非偶然；另外又運用類似的論證，解答出星星的尖角有多大（一個較貼近生活的問題）。

同樣是課本的不足，關於三角形的面積：書上試著說理，卻只說了半套（沒指出該質問的地方，也暗自避開較難講的情況），這是連學校老師都可能沒察覺到的。關於道理要講得多完整，可以深到什麼程度？當然沒有一定的答案，不過，既然是論證，若有保留略過之處，總要能指明才好。至於挖空心思去設計新的教法，以論證學習來促進小孩的心智成長，這就不是課本所能，而是《想想》給出的許諾。